



TITLE:

楕円モジュラー曲面 (代数多様体、 複素多様体の理論)

AUTHOR(S):

塩田, 徹治

CITATION:

塩田, 徹治. 楕円モジュラー曲面 (代数多様体、複素多様体の理論). 数理解析研究所講究録 1971, 116: 45-60

ISSUE DATE:

1971-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106442>

RIGHT:

楕円モジュラー曲面

東大 理 塩田 徹治

K を代数体 又は 一変数代数函数体, A を K 上定義されたアーベル多様体とする。 A の K -有理点のなす群 $A(K)$ について $A(K)$ は有限生成なアーベル群であることが知られている。(Mordell-Weil の定理, 但し K が函数体のとき A に多少条件がつく)。しかしながら, K, A から与えられたとき, 群 $A(K)$, とくに $\text{rank } A(K)$, を求めることは (A の次元が 1 の時でも) 一般に非常に難しい問題であり, いくつかの興味ある予想が提出されている (eg. Cassels [1], Tate [7])。

この小文では K が複素数体 \mathbb{C} 上の一変数函数体, A は K 上の楕円曲線の場合に, 上の問題及びそのある意味で dual な問題 — A の principal homogeneous spaces の群に属する — を 楕円曲面の立場から考察する。基礎体 \mathbb{C} に限る代りに, 必ずしも代数的でない解析的曲面とも考え, その中で代数的なものか, どう分布しているかも問題とする。

次に、楕円モジュラー群から自然に定義される楕円モジュラー曲面について、この問題を考える。この楕円モジュラー曲面は、基礎体の標数が正のときにも、定義され、それは、曲面の数論的研究のために、意味ある例を与えるものと思われるが、これについては別の機会にゆずりたい。

§1. 準備. この節では、楕円曲面の一般論(小平[4]による)から以下に必要な部分を復習し、あわせて記号を定める。

a) S を楕円曲面とする。定義により、代数曲線 Δ と S から Δ への正則写像 π があって、 $\Delta \ni u$ 上の fibre $C_u = \pi^{-1}(u)$ は、有限個の u を除いて、楕円曲線となる。除外された u の集合 $\sum \subset \Delta$ とする。 $v \in \sum$ のとき、 C_v は singular fibre とよばれ、 S 上の divisor として、次のようにかかれる：

$$(1.1) \quad C_v = \sum_{i=0}^{n_v} m_{v,i} \mathbb{H}_{v,i}$$

ここに、 $m_{v,i} \geq 1$ 、 $\mathbb{H}_{v,i}$ は S 上の既約曲線、 n_v+1 は C_v の既約成分の数を表す。singular fibres の type は、完全に分類されている([4], §6)。以下では、常に各 fibre は第一種例外曲線を含まいとする。更に、 S が Δ 上の holomorphic section $o: \Delta \rightarrow S$ ($o=0=\text{id}_\Delta$) をもつとき、 S は basic type の楕円曲面とよび、 S の代りに、文字 B を用いる。

B は代数曲面となる。この場合 singular fibre $C_v \in (1.1)$ のように表わすとき、曲線 $\partial(\Delta)$ と交わる唯一つの成分 $\mathbb{H}_{v,1}$ を $\mathbb{H}_{v,0}$ とかくことにする: $\mathbb{H}_{v,0} \supset \partial(v)$, $m_{v,0} = 1$.

b). 次に、楕円曲面 $B \rightarrow \Delta$ の homological invariant, functional invariant を夫々 G, g で表わす。 g は Δ 上の函数で generic fibre の楕円曲線の予変量に対応する。 G は Δ 上の層で $G|_{\Delta'}$ (但し $\Delta' = \Delta - \Sigma$) は locally constant その stalk は次のように与えられる:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} G_u &= H^1(C_u, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2, \quad u \in \Delta' \\ G_v &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & v \in \Sigma, C_v: \text{type } I_b (b \geq 1) \\ 0 & \text{" " : 他の type} \end{cases} \end{aligned}$$

G は Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ への表現を定め、逆にえられて定まる。さて Δ 上の data g, G を固定して、これを functional & homological invariant としても Δ 上の楕円曲面の族 (E 適当な同値関係でつけたもの) を $\mathcal{F} = \mathcal{F}(g, G)$ とかく。 B から出発するとき B は Δ 上 global section をもつ \mathcal{F} の unique member として特徴づけられる。逆に g, G が ある compatibility 条件を満たすとき $\mathcal{F}(g, G)$ に属す basic type の楕円曲面が存在する ([4], §8).

c). B に対し Δ 上の section σ を identity section とする group scheme (又は、複素 Lie 群の fibre system) $B^\#$

が定義される: $B^\# \subset B$. $v \in \Delta$ について $C_v^\# = C_v \cap B^\#$ は $0(v)$ を単位元とする群で、その単位元の成分 $C_{v,0}^\#$ は、楕円曲線、 \mathbb{C}^\times (乗法群), \mathbb{C} (加法群) のいつしかである ($\text{rank } G_v = 2, 1, 0$ に対応して)。更に $C_v^\# / C_{v,0}^\#$ は有限可換群で、 χ の位数 $c_v = \#\{i \geq 0 \mid m_{v,i} = 1\}$ である ([4] p.604)。さて $\Omega(B^\#)$ で $B^\#$ の Δ 上の (holomorphic) sections の sheaf を表し、cohomology 群 $H^q(\Delta, \Omega(B^\#))$ ($q=0,1$) を考える。 $q=0$ のとき、 $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は B の Δ 上の section のなす群に他ならない。 functional invariant $f \neq \text{const.}$ のとき、これは Mordell-Weil の定理により有限生成な群である。 $q=1$ については、前の楕円曲面の族 $\mathcal{F}(g, G)$ と $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ との間には 1 対 1 の対応がある。即ち、各 $\gamma \in H^1$ に対し $B \in \gamma$ で twist した楕円曲面 B^γ が定義され、 $\mathcal{F}(g, G) = \{B^\gamma \mid \gamma \in H^1\}$ となる ([4] Th.10.5) 更に B^γ が代数曲面 $\iff \gamma$ が有限位数 となることが証明されている (同 Th.11.5)。

d) Δ 上の line bundle f . ([4] §11). f の $v \in \Delta$ での stalk f_v は $C_{v,0}^\#$ の $0(v)$ での tangent space である。 f の holom. sections の sheaf $\mathcal{O}(f)$ について、次の完全列が成立つ:

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow G \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}(f) \xrightarrow{h} \Omega(B_0^\#) \rightarrow 0.$$

B の canonical bundle K は、 Δ の χ に対して $K = \mathbb{P}^*(\mathbb{R} - f)$ と与えられる。よって B の geometric genus $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$.

§2. Sections の群と Néron-Severi 群 以下 $g \neq \text{const}$

と仮定する。楕円曲面 B の Δ 上の sections の群 $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ は有限生成だから、 χ の rank $\leq \chi$ とする。 ± 2 group scheme $B^\#$ の単位成分 $\in B_0^\#$ とし、sheaf $\Omega(B^\#)$ の subsheaf $\Omega(B_0^\#)$ による商 $\in Q$ とかく。 Q は $\Sigma(\subset \Delta)$ 上に support $\in \Sigma$ 。 χ の stalk $Q_v = C_v^\# / C_{v,0}^\#$ である。完全列

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow \Omega(B_0^\#) \rightarrow \Omega(B^\#) \rightarrow Q \rightarrow 0$$

より次のことは容易に分る。(i). $H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ は $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ の有限指数の部分群。従って χ の rank $\leq \chi$ である。

(ii) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ の有限群による商となる。

そこで §1. d) の (1.3) から導かれる cohomology の完全列

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \rightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{L^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(\#)) \\ \xrightarrow{h^*} H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \rightarrow H^2(\Delta, G) \rightarrow 0.$$

を考へる。

Lemma.1. $G \neq \text{trivial}$ のとき

i) $H^1(\Delta, G)$ は有限生成で rank $4g - 4 + 2t - t_1$

ii) $H^2(\Delta, G)$ は有限群

但し g は Δ の genus, t は B の singular fibres の総数

t_1 は type I_b ($b \geq 1$) の singular fibres の数。

証明略。

今 $r' = \text{rank } r^* H^1(\Delta, G)$ とかく。(2.2) と Lemma から

明らかに

$$(2.3) \quad r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1.$$

更に r' は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ が $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\nu$ に同型の部分群を含むような最大の ν として定義してもよい. 式 (2.3) は

Ogg - Šafarevič の公式とよばれるものの特別な場合である.
 $(2t - t_1 = \sum_v \varepsilon_v, \quad \varepsilon_v = 2 - \text{rank } G_v = 0, 1, 2 \text{ に注意}).$

次に、曲面 B の Néron-Severi 群 $NS(B)$ を考える. これは B 上の因子の群を代数的同値で割ったものとして定義される. \mathbb{C} 上の代数曲面の場合には $NS(B)$ は 2 次整係数 homology 群 $H_2(B, \mathbb{Z})$ (或は cohomology 群 $H^2(B, \mathbb{Z})$) の部分群とみなされる. その rank ρ ($= B$ の Picard 数) は basic type の楕円曲面のとき、次式で与えられる.

$$\text{Th.} \quad \rho = r + 2 + \sum_{v \in \Sigma} n_v.$$

ここに r は上の通り $= \text{rank } H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$, n_v は C_v の既約成分の個数 $- 1$.

より詳しく、次のことが分る. $H^0(\Delta, \Omega(B^\#)) \bmod \text{torsion}$ の basis を s_1, \dots, s_r とする. 一般に section s を定め B 上の曲線 $S(\Delta)$ を (s) とかくことにすると $r + 2 + \sum n_v$ の因子

$$C_u, (0); (S_\alpha) - (0), (\alpha = 1, \dots, r);$$

$$\bigoplus_{v, i} (v \in \Sigma, i \geq 1)$$

は互に独立で $NS(B)$ の有限指数の free submodule を生成する. (その指数は $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}$ の位数に等しい).

この定理は、次の Lemma と generic fibre の楕円曲線上の Abel の定理を用いて証明される.

Lemma 2. $\forall u_1, u_2 \in \Delta$ について $C_{u_1} \approx C_{u_2}$ (代数的同値)
とくに $C_u \approx \bigoplus_{v,0} \oplus_{i \geq 1} m_{v,i} \bigoplus_{v,i}$.

Lemma 3. B 上の因子 D, D' の交点数を (DD') とかく

とき、次の整係数二次形式

$$\sum_{i,j=1}^{n_v} (\bigoplus_{v,i} \bigoplus_{v,j}) x_i x_j, \quad v \in \Sigma$$

は負定値で、その判別式の絶対値は $c_v = |C_v^\# / C_{v,0}^\#|$ である.

証明は、前者は代数的同値の定義より明らか、後者は singular fibre の各 type について確かめられる。例えは type Π^* の singular fibre は、8 変数で判別式 1 なる負定値整係数二次形式を与える。

Cor. $NS(B) \bmod \text{torsion}$ の basis $\varepsilon D_1, \dots, D_p$ とすると

$$\frac{|\det(D_i D_j)|}{|NS(B)_{\text{tor}}|^2} = \frac{d \cdot \prod c_v}{|H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}|^2}.$$

$$2 \leq d = |\det(\widehat{(S_\alpha) - (0)} \cdot \widehat{(S_\beta) - (0)})|_{1 \leq \alpha, \beta \leq r}.$$

Remark. $NS(B)$ は実際は torsion-free である。又 $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ も torsion-free で $H^0(\Delta, \Omega(B^\#))$ の free part を与える。

また B の v 次 Betti 数 b_v とかくと $b_1 = 2g$ であり
 b_2 は $2 - 2b_1 + b_2 = c_2$ (B の Euler 標数) で与えられる。
 c_2 は [4] §12.5) B の singular fibres によつて計算される。
 Ogg-Šafarevič の式 (2.3) を用いて 次を得る。

$$\text{Th.} \quad b_2 - p = r'.$$

更に $b_2 = \sum_{i+j=2} h^{i,j}$, $h^{0,2} = h^{2,0} = p_g$, $h^{1,1} \geq p$ (Lefschetz-Hodge) となる。

$$\text{Cor.} \quad r' \geq 2p_g. \quad \text{また}$$

$$r \leq 4g - 4 + 2t - t_1 - 2p_g.$$

Remark rank r について 底曲線 Δ (又は γ の代数体 K) の genus g) だけによる universal な上限はない。
 (Lapin; 代数体の場合 Tate-Šafarevič, Soviet Math. Dokl. 1967)
 かつこれには torsion part の位数 $|H^0(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}|$ について g のみによる上限がある。(Levin, Amer. J. 1968)

§3. Density of $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}$ in $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$. まず
 $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ に次のように位相を入れる。(2.2)より

$$H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \simeq H^1(\Delta, \mathcal{O}(\mathfrak{f})) / i^* H^1(\Delta, G) \times H^1(\Delta, G).$$

であるが $H^1(\Delta, \mathcal{O}(\mathfrak{f}))$ は \mathbb{C} 上のベクトル空間としての自然な位相をもつから 上式の右辺に (高次元) \times (discrete 位相) による位相を入れる 同型で左辺の γ へを定める。又 §2 初めに

注意したように $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は $H^1(\Delta, \Omega(B_0^\#))$ の有限部分群による商だから、これに商位相を入れる。

問題: $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}$ (= torsion subgroup) は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ において dense か?

上の位相の入れ方から、明らかに次の (1), (2) は同値である。

(1) $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で dense.

(2) $i^*H^1(\Delta, G)$ は \mathbb{R} 上 $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ を生成する。

更に §1.c) で述べたように、 B を \mathbb{C} -環とする楕円曲面の族 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(g, G)$ は $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ で parametrize され、 $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))_{\text{tor}}$ は丁度 \mathcal{F} に属する代数曲面をあらわすから (1) は次のようにいいかえられる。

(3) \mathcal{F} の中で、代数曲面は稠密に分布する。

2 の問題は B が後述する楕円モジュラー曲面の場合 [6] において、志村 [5] の結果に帰着させて解決された。一般の場合には、まず B 上の層の完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ を考える。対応する cohomology 列において、 $H^1(B, \mathcal{O}^*)$ の $H^2(B, \mathbb{Z})$ への像は、前節で考えた $NS(B)$ と同一視されるから次の完全列を得る:

$$0 \rightarrow NS(B) \rightarrow H^2(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^2(B, \mathcal{O}) \rightarrow$$

一方 (2.2) より

$$0 \rightarrow H^0(\Delta, \Omega(B_0^\#)) \rightarrow H^1(\Delta, G) \xrightarrow{i^*} H^1(\Delta, \mathcal{O}(f)) \rightarrow$$

Lemma. $H^2(B, \mathcal{O})$ から $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ への同型写像 ψ が存在し、 $\psi j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ と $j^* H^1(\Delta, G)$ は ($H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ において) commensurable である。

証明は $\pi: B \rightarrow \Delta$ に関する Leray の spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(\Delta, R^q \pi_* (\mathcal{O})) \Rightarrow H^*(B, \mathcal{O})$ と $R^1 \pi_* (\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}(f)$ (or $R^1 \pi_* (\mathbb{Z}) \simeq G$) を用いて示される。

従って上の (2) と次の (4) とは同値である。

(4) $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は \mathbb{R} 上 $H^2(B, \mathcal{O})$ を生成する。

Th. (1), ~ (4) は成立する。

証明. (4) が成立することを示す。すなわち自然な準同型 $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}$ から引き起こされる $H^2(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} H^2(B, \mathcal{O})$ から上の写像であることとをいふはよい。 $H^2(B, \mathbb{R}) \ni c$ に対し c を代表する B 上の real d -closed 2-form ω とし、 ω の $(0,2)$ -成分を η' とおく。すると $\bar{\partial}$ -closed form η' は Dolbeault isomorphism により $\pi c \in H^2(B, \mathcal{O})$ に対応する。これより π が上への写像なことは明らか。

Cor. $r' = 2p_g$ のとき、 $j^* H^1(\Delta, G)$ は $H^1(\Delta, \mathcal{O}(f))$ の lattice. (同様に $p = h^{1,1}$ のとき、 $j^* H^2(B, \mathbb{Z})$ は $H^2(B, \mathcal{O})$ の lattice) 従って、 $H^1(\Delta, \Omega(B^\#))$ は複素トーラス (×有限群) の構造をもつ。

§4. 楕円モジュラー曲面. この節では、一変数保型函数論の知識(e.g. 河田[3])を仮定する。 $\Gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ の有限指数の部分群とする。よく知られているように、 Γ は上半平面 $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ に $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ で作用し、商空間 $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ は有限個の cusps をつけ加えることにより compact な Riemann 面となる。これを $\Delta = \Delta_\Gamma$ とかく。我々は、 Δ を底曲線とする自然な楕円曲面を定義したいのだが、そのために以下 " $\Gamma \ncong -1_2$ " と仮定する。

$$\mu = [SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma \cdot \{\pm 1_2\}]$$

$$g = \Delta_\Gamma \text{ の genus}$$

$$t' = \Gamma \text{ の cusps の数}$$

$$s = \Gamma \text{ の elliptic points の数, } t = t' + s$$

とかく。各 elliptic point を代表する Γ の元は、位数3で $SL(2, \mathbb{Z})$ の中で $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$ に共役である。又、各 cusp を代表する Γ の元は、 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$ または $\begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$ ($b \geq 1$) の形の元に共役である。前者の場合、 \mathcal{C} -種の cusp といい、後者は \mathcal{C}' -種の cusp といい、 t_1 (または t_2) で \mathcal{C} -種 (または \mathcal{C}' -種) の cusps の数を表す: $t' = t_1 + t_2$ 。

Γ の cusps と elliptic points の集合を Σ , $\Delta' = \Delta - \Sigma$ とかくと、 Δ' の基本群 $\pi_1(\Delta')$ から $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ への自然な表現 ρ が定まる。(とくに、 Γ が torsion-free のとき

$\pi_1(\Delta') \cong \Gamma$). φ から Δ 上の sheaf G で Δ' 上 locally constant (fibre $\cong \mathbb{Z}^2$) なるものがつくられる。次に $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ によって、自然同写像 $\Gamma \backslash \mathfrak{h} \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}$ があるが、これは $g: \Delta_\Gamma \rightarrow \Delta_{SL(2, \mathbb{Z})} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$ なる Δ_Γ 上の有理型写像に延長される (g は普通の楕円モジュラー函数)。この g, G の対は §1. b) の最後の所で行った条件をみたすから、 g, G を天々 functional, homological invariant としても Δ_Γ 上の basic type の楕円曲線 $B = B_\Gamma$ が一意的に存在する。この B_Γ を (Γ によって定まる) 楕円モジュラー曲面 (elliptic modular surface) とよぶことにする。

B_Γ の singular fibres は Σ 上にあって、 \mathfrak{c} -種の cusp 上には type I_b ($b \geq 1$), \mathfrak{c} -種の cusp 上には type I_b^* ($b \geq 1$) 又 elliptic points の上には type IV^* の singular fibre がある。(cf [4] p604.)。従って t, t_1 は §2. Lemma 1 に使った記号と同じ意味をもつ。

さて Δ_Γ と $\Delta_{SL(2, \mathbb{Z})}$ の invariant measure を比較して

$$2g - 2 + t' + (1 - \frac{1}{3})s = \frac{1}{6}\mu$$

次に [4] p.14 (12.6) により ($p_a = B_\Gamma$ の arithmetic genus)

$$12(p_a + 1) = \mu + 6t_2 + 8s$$

従って $p_g = p_a + g$ は次式で与えられる。

$$p_g = 2g - 2 + t - \frac{t_1}{2} \quad (t = t' + s)$$

§2. Lemma 1 より $p_g = \frac{1}{2} \text{rank } H^1(\Delta, G)$. 2は(2,3)より

$$r + r' = 4g - 4 + 2t - t_1 = 2p_g$$

一方 §2. 最後の Cor. 1 より $r' \geq 2p_g$. 故に

Th. 楕円モジュラー曲面 B_Γ については

$$r = 0, \quad r' = 2p_g$$

§3. 未の Cor. 1 より

Cor. $H^1(\Delta_\Gamma, \mathcal{O}(\mathfrak{f})) / \mathbb{Z}^* H^1(\Delta_\Gamma, G)$ (2は $H^1(\Delta_\Gamma, \Omega(B_\Gamma^\#))$) は p_g 次元複素トーラス (\times 有限群) の構造をもつ.

Remark. この複素トーラスは [6] で示したように

weight 3 の Γ -cusp forms の空間 $\mathcal{S}_3(\Gamma)$ から, 志村[5]の方法でつくった複素トーラスと同じものである. [5]では一般に, weight m が偶数のとき, $\mathcal{S}_m(\Gamma)$ からつくったトーラスが, (Petersonの内積を用いて) アーベル多様体となることが証明されているが, この方法は m が奇数のときは適用できない. しかし, 志村先生によれば, 適当な Γ に対しては, m が奇数でも, 問題の複素トーラスの準同型環を考察することにより, それがアーベル多様体となることがいえるとのことである.

最後に, 具体的な例を考へよう.

184. $\Gamma(N)$ を level N の主合同部分群 $\{\gamma \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid$

$\gamma \equiv 1_2 \pmod{N} \}$ とする. $N \geq 3$ のとき $\Gamma(N)$ は torsion-free

かつ, $\Gamma(N)$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ の正規部分群であるから, $\Gamma(N)$ の
 全ての cusps は 1-種と可算 ($s=0, t=t_1$). $\Gamma(N)$ で定
 める楕円モジュラー曲面を $B(N) = B_{\Gamma(N)}$ とかくことにする.
 $B(N)$ の singular fibre は全て type I_N である. $B(N)$ に関
 する numerical character $g, p_g, \dots \in g(N), p_g(N), \dots$
 とかけは (cf. 河田 [3]. I. p. 92)

$$\mu(N) = \frac{1}{2} N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$g(N) = 1 + \frac{N-6}{12N} \mu(N), \quad t(N) = \frac{1}{N} \mu(N).$$

$$p(N) = 2 + (N-1) \cdot t(N)$$

$$p_g(N) = \frac{N-3}{6N} \mu(N), \quad b_2(N) = 2p_g(N) + p(N).$$

小さい N について

N	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	0	0	1	3	5	10	13
t	4	6	12	12	24	24	36	36
p	10	20	50	62	146	170	290	326
p_g	0	1	4	6	16	20	36	42
b_2	10	22	58					410

また $\Delta_{\Gamma(N)}$ は level N structure をもつ楕円曲線の
 moduli (の compactification) を与える. $B(N)$ は. いろいろな楕円曲
 線の universal family の一つの compactification である.
 $B(N)$ については rank $r=0$ のみならず

$$H^0(\Delta_{\Gamma(N)}, \Omega(B(N)^\#)) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

が知られている. $N=3$ のとき $B(3)$ は 有理曲面で, $3^2=9$ 個

の sections は互いに交わり 9 個の第一種例外曲線と交わる。
 $N=4$ のとき $B(4)$ は $K3$ 曲面で $p_g=1$ 次の複素トーラスは、楕円曲線 $\mathcal{O}(\sqrt{4})$ をもつ楕円曲線である。

Remark. $\Delta(\Gamma(N))$ の函数体 K_N は $\Gamma(N)$ に関するモジュラー函数体に他ならない。 $B(N)$ の generic fibre を $E(N)$ とかくと $E(N)$ は K_N 上定義された楕円曲線で、その K_N -有理点の群は $E(N)$ の N 等分点の群 $E(N)_N (\simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2)$ に等しい。故に $E(N)/K_N$ は $N=2, 3$ に関する次の事実 (井草 [2] p.464) の一般の N への拡張 (但し $k=\mathbb{C}$ として) を与えるものと解釈される。

(i) k を標数 $\neq 2$ の体 $\lambda \in k$ 上の変数 $K_2 = k(\lambda)$ とする。 K_2 上の楕円曲線 $E (\subset \mathbb{P}^2)$: $y^2 z = x(x-z)(x-\lambda z)$, 原点 $= (0, 1, 0)$ について E の K_2 -有理点の群 $E(K_2) = E_2 = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (\lambda, 0, 1)\}$ 。

(ii) k を標数 $\neq 3$ の体で 1 の 3 乗根を含むとする。 $\mu \in k$ 上の変数 $K_3 = k(\mu)$ とすると $E: x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$ (\mathbb{P}^2 の base point の一つ, e.g. $(1, -1, 0)$, を原点として) について $E(K_3) = E_3 = \{9 \text{ 個の base points}\}$ 。 $k=\mathbb{C}$ のとき \mathbb{P}^2 からこの 9 個の点を blowing-up し得られる曲面は上に $B(3)$ に同型である。

文献

1. J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *Jour. London Math. Soc.* 41, (1966) pp. 193-291.
2. J. Igusa, Fibre systems of Jacobian varieties III. *Amer. J. Math.* 81 (1959) pp 453-476.
3. 河田敬義, 一変数楕円型函数の理論 I, II. (東大セミナー-1-1).
4. K. Kodaira, On compact analytic surfaces II-III. *Ann. of Math.* 77 (1963) pp 563-626., 78 pp 1-40.
5. G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, *Jour. Math. Soc. Japan* 11 (1959) pp 291-311.
6. T. Shioda, Elliptic modular surfaces, I, II. *Proc. Japan Acad.* 45 (1969) pp 786-790, 833-837.
7. J. Tate, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, *Sem. Bourbaki* n° 306 (1965/66), pp 1-26.